Devoir maison n$^{\text{o}}$ 12 - Corrigé

Exercice 1 (d'après ATS 2021)**.**
Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |\cos x| - |\sin x|$.

Q1. Montrer que f est périodique de période π.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= |\cos(x+\pi)| - |\sin(x+\pi)| \quad \text{\textit{formule angles associés}} \\ &= |-\cos x| - |-\sin x| \\ &= |\cos x| - |\sin x| \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc $\boxed{f \text{ est } \pi\text{-périodique}}$.

Q2. Étudier la parité de f.

- L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(-x) &= |\cos(-x)| - |\sin(-x)| \quad \cos \text{ \textit{paire et} } \sin \text{ \textit{impaire}} \\ &= |\cos x| - |-\sin x| \\ &= |\cos x| - |\sin x| \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est paire}}$.

Q3. Justifier que pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \cos x - \sin x$.

Pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x$ et $\sin x$ sont des réels positifs, autrement dit $|\cos x| = \cos x$ et $|\sin x| = \sin x$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ f(x) = \cos x - \sin x}$.

Q4. Calculer une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x - \sin x = C\cos\Big(x + \frac{\pi}{4}\Big).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule d'addition et les valeurs trigonométriques usuelles, on a

$$\begin{aligned} C\cos\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big) &= C\Big(\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}\Big) \\ &= \frac{C\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{C\sqrt{2}}{2}\sin x. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient $\dfrac{C\sqrt{2}}{2} = 1$, *i.e.* $\boxed{C = \sqrt{2}}$.

Pour la suite, on utilisera l'égalité :

$$\forall x \in \Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big],\ f(x) = C\cos\Big(x + \frac{\pi}{4}\Big).$$

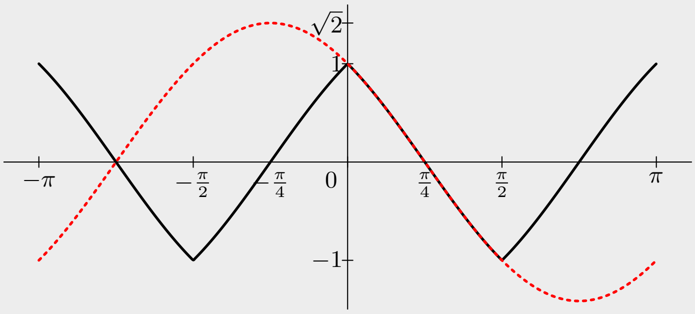
Q5. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

On procède par étapes :

① on trace f grâce à l'expression précédente sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ (s'aider de quelques valeurs particulières, courbe complète sur $[-\pi\,;\pi]$ en pointillé rouge) ;

② on utilise la parité de f pour obtenir la courbe sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$ par symétrie d'axe (Oy) ;

③ on utilise la π-périodicité de f pour obtenir le tracé complet.



Q6. Montrer que la série de Fourier Sf de la fonction f peut s'écrire sous la forme

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nx).$$

Par définition, la série de Fourier est de la forme

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x).$$

Or, d'après la question **Q2**, la fonction f est paire donc $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus d'après la question **Q1**, f est π-périodique donc $\omega = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.

Ainsi, la série de Fourier de f est de la forme $\boxed{Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nx)}$.

Q7. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction f sur $\mathbb{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge en tout point vers f, *i.e.* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ Sf(x) = f(x)}$.

Q8. Montrer que $a_0 = 0$.

Comme a_0 est la valeur moyenne, on a

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\mathbf{Q2}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$, on peut remplacer f par l'expression obtenue à la question **Q4**, d'où :

$$a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\Big(t+\frac{\pi}{4}\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\Big[\sin\Big(t+\frac{\pi}{4}\Big)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{0}.$$

Q9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que

$$a_n = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\Big(t+\frac{\pi}{4}\Big)\cos(2nt)\,\mathrm{d}t.$$

Comme f est π-périodique, par définition

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\cos(2nt)\,\mathrm{d}t && \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)\cos(2nt)\,\mathrm{d}t && \textit{fonction à intégrer paire} \\
&= \boxed{\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\Big(t+\frac{\pi}{4}\Big)\cos(2nt)\,\mathrm{d}t}. && \textit{expression de } f \textit{ sur cet intervalle}
\end{aligned}$$

Q10. Montrer que, pour tout entier naturel p, on a

$$a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \frac{8}{\pi\big[4(2p+1)^2-1\big]}.$$

Indication : on pourra utiliser l'égalité $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise le résultat précédent et la formule de trigonométrie donnée :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\Big((2n+1)t+\frac{\pi}{4}\Big)+\cos\Big((2n-1)t-\frac{\pi}{4}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}\sin\Big((2n+1)t+\frac{\pi}{4}\Big)+\frac{1}{2n-1}\sin\Big((2n-1)t-\frac{\pi}{4}\Big)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\sin\big(n\pi+\frac{3\pi}{4}\big)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2n+1}+\frac{\sin\big(n\pi-\frac{3\pi}{4}\big)+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2n-1}\right).
\end{aligned}$$

- Maintenant, si n est pair, *i.e.* $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\sin\Big(2p\pi+\dfrac{3\pi}{4}\Big) = \sin\Big(\dfrac{3\pi}{4}\Big) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\Big(2p\pi-\dfrac{3\pi}{4}\Big) = \sin\Big(-\dfrac{3\pi}{4}\Big) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\boxed{a_{2p} = 0}$.
- Si n est impair, *i.e.* $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$, on a $\sin\Big((2p+1)\pi+\dfrac{3\pi}{4}\Big) = -\sin\Big(\dfrac{3\pi}{4}\Big) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\Big((2p+1)\pi-\dfrac{3\pi}{4}\Big) = -\sin\Big(-\dfrac{3\pi}{4}\Big) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Il reste donc

$$a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2n+1}+\frac{\sqrt{2}}{2n-1}\right) = \frac{4}{\pi}\times\frac{-(2n-1)+(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{4}{\pi}\times\frac{2}{\big[(2n)^2-1^2\big]}.$$

Ainsi, comme ici $n = 2p+1$, on obtient $\boxed{a_{2p+1} = \dfrac{8}{\pi\big[4(2p+1)^2-1\big]}}$.

Q11. Grâce à la question **Q7** et les calculs précédents, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{4(2p+1)^2-1}$.

D'après les questions **Q6** et **Q7**, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(2nx) = f(x).$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient $a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = f(0) = 1$.

Or $a_0 = 0$ et, en séparant les termes d'indices pairs et impairs, on obtient

$$\sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} = 1$$

qui donne grâce à la question précédente :

$$0 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi\left[4(2p+1)^2 - 1\right]} = 1$$

qui se réécrit sous la forme

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{4(2p+1)^2 - 1} = \frac{\pi}{8}}.$$

Q12. Énoncer le théorème de Parseval.

Si une fonction g est T-périodique et continue par morceaux alors la série $\sum a_n^2 + b_n^2$ converge et on a

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)^2 \, \mathrm{d}t.$$

Q13. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\left[4(2p+1)^2 - 1\right]^2}$.

En appliquant le théorème de Parseval à la fonction f qui est π-périodique, comme $a_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = 0$, on a

$$(\star) \qquad \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)^2 \, \mathrm{d}t.$$

- D'une part, en séparant les termes pairs et impairs et en utilisant la question **Q10**, le membre de gauche vaut

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}^2 = \frac{1}{2} \times \frac{8^2}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\left[4(2p+1)^2 - 1\right]^2}.$$

- D'autre part, le membre de droite vaut :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)^2 \, \mathrm{d}t &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)^2 \, \mathrm{d}t && \textit{par parité} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\sqrt{2})^2 \cos^2\Big(t + \frac{\pi}{4}\Big) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos\Big(2\big(t + \frac{\pi}{4}\big)\Big)}{2} \, \mathrm{d}t && \textit{formule trigo} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 1 + \cos\Big(2t + \frac{\pi}{2}\Big) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\left[t + \frac{1}{2}\sin\Big(2t + \frac{\pi}{2}\Big)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\Big) - \Big(0 + \frac{1}{2}\Big)\right) \\
&= \frac{\pi - 2}{\pi}.
\end{aligned}$$

D'après $(\star)$, on obtient

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\left[4(2p+1)^2 - 1\right]^2} = \frac{\pi - 2}{\pi} \times \frac{2\pi^2}{8^2} = \boxed{\frac{\pi(\pi - 2)}{32}}.$$

Exercice 2. [Facultatif] (*d'après Centrale 2022*)
On note $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et continues sur $\mathbb{R}$.
Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0_{2\pi}$, les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont définis par

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et, pour tout entier k dans $\mathbb{N}^*$,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t, \qquad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t.$$

On va étudier le comportement asymptotique des coefficients de Fourier d'une fonction de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ supposée de classe $\mathcal{C}^1$.

À toute fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, on associe la suite $\big(c_k(f)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie par $c_0(f) = a_0(f)$ et, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$c_k(f) = \frac{1}{2}\big(a_k(f) - \mathrm{i}b_k(f)\big), \qquad c_{-k}(f) = \frac{1}{2}\big(a_k(f) + \mathrm{i}b_k(f)\big).$$

Q1. Vérifier que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$.

- *Pour c_0* : on a $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}0t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = a_0(f) = c_0(f)$.
- *Pour c_k avec $k \in \mathbb{N}^*$* : on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\big[\cos(-kt) + \mathrm{i}\sin(-kt)\big]\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}a_k(f) - \mathrm{i}\frac{1}{2}b_k(f) \\
&= \frac{1}{2}\big(a_k(f) - \mathrm{i}b_k(f)\big) = c_k(f).
\end{aligned}$$

parité cos *et* sin + *linéarité intégrale*

- *Pour c_{-k} avec $k \in \mathbb{N}^*$* : de même que précédemment, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-k)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\big[\cos(kt) + \mathrm{i}\sin(kt)\big]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big(a_k(f) + \mathrm{i}b_k(f)\big) = c_{-k}(f).$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{Z},\ c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t}$.

La suite $\big(c_k(f)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ s'appelle la suite des *coefficients de Fourier exponentiels* de la fonction f.

Q2. *Question de cours* : citer le théorème de Parseval pour une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Si f est T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors les séries $\sum\big(a_n(f)\big)^2$ et $\sum\big(b_n(f)\big)^2$ sont convergentes et on a l'égalité

$$\frac{1}{T}\int_0^T \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t = \big(a_0(f)\big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[\big(a_n(f)\big)^2 + \big(b_n(f)\big)^2\Big].$$

Q3. Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $\big|c_k(f)\big|^2$ et $\big|c_{-k}(f)\big|^2$ en fonction de $a_k^2(f)$ et $b_k^2(f)$ et, en utilisant le théorème de Parseval, démontrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} c_k(f) = \lim\limits_{k\to+\infty} c_{-k}(f) = 0$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $c_{\pm k}(f) = \frac{1}{2}\big(a_k(f) \pm \mathrm{i} b_k(f)\big)$. Comme les coefficients $a_k(f)$ et $b_k(f)$ sont réels, on obtient $\boxed{|c_{\pm k}|^2 = \frac{1}{4}\Big[\big(a_k(f)\big)^2 + \big(b_k(f)\big)^2\Big]}$.
- La fonction f étant 2π-périodique et continue, d'après le théorème de Parseval rappelé à la question précédente, les séries $\sum \big(a_n(f)\big)^2$ et $\sum \big(b_n(f)\big)^2$ sont convergentes. En particulier leurs termes généraux respectifs ont pour limite 0. Ainsi, d'après le premier point, on obtient $\boxed{\lim_{k \to +\infty} c_{-k}(f) = \lim_{k \to +\infty} c_k(f) = 0}$.

Pour les trois questions suivantes, f est une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs réelles.

Q4. Pour tout entier naturel k non nul, justifier l'existence de $a_k(f')$ et $b_k(f')$.

La fonction f étant 2π-périodique, sa dérivée f' l'est aussi. De plus, comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, sa dérivée f' est continue. Ainsi $\boxed{f' \in \mathcal{C}^0_{2\pi}}$ et d'après les rappels donnés au début de l'énoncé, les coefficients de Fourier de f' sont donc bien définis comme $\boxed{\text{intégrales de fonctions continues sur un segment}}$.

Q5. À l'aide d'intégrations par parties, démontrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$a_k(f') = k b_k(f) \quad \text{et} \quad b_k(f') = -k a_k(f).$$

En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $c_k(f') = \mathrm{i} k c_k(f)$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, les coefficients $a_k(f')$ et $b_k(f')$ sont bien définis.

On pose $\begin{cases} u = \cos(kt) \\ v' = f'(t) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u' = -k\sin(kt) \\ v = f(t) \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;2\pi]$. Ainsi, par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
a_k(f') &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\textit{IPP}}{=} \frac{1}{\pi}\left(\Big[f(t)\cos(kt)\Big]_0^{2\pi} + k\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t\right) \\
&\overset{\cos(2k\pi) = \cos(0) = 1}{=} \frac{1}{\pi}\left(f(2\pi) - f(0) + k\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t\right) \\
&\overset{f(2\pi) = f(0)\ \textit{car } f\ 2\pi\textit{-périodique}}{=} \frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \boxed{k b_k(f)}.
\end{aligned}$$

En procédant de manière analogue, on obtient $\boxed{b_k(f') = -k a_k(f)}$.

- Soit $k \in \mathbb{Z}^*$.

Si $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$c_k(f') \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\big(a_k(f') - \mathrm{i} b_k(f')\big) = \frac{1}{2}\big(k b_k(f) + \mathrm{i} k a_k(f)\big) = \mathrm{i} k \frac{1}{2}\big(a_k(f) - \mathrm{i} b_k(f)\big) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{i} k c_k(f).$$

Si $k < 0$, on écrit $k = -\ell$ avec $\ell \in \mathbb{N}^*$. De façon analogue au calcul précédent, on a

$$\begin{aligned}
c_k(f') = c_{-\ell}(f') &\overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\big(a_\ell(f') + \mathrm{i} b_\ell(f')\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(\ell b_\ell(f) - \mathrm{i}\ell a_\ell(f)\big) = \mathrm{i}(-\ell)\frac{1}{2}\big(a_\ell(f) - \mathrm{i} b_\ell(f)\big) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{i}(-\ell) c_{-\ell}(f) = \mathrm{i} k c_k(f).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\boxed{k \in \mathbb{Z}^*,\ c_k(f') = \mathrm{i} k c_k(f)}$.

Q6. En déduire que $|c_k(f)| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$ et $|c_{-k}(f)| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

D'abord, d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, on a $|c_k(f')| = |k||c_k(f)|$.
Or, comme expliqué en **Q4**, $f' \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ donc, d'après **Q3** appliqué pour f', on a $\lim\limits_{k\to+\infty} c_{\pm k}(f') = 0$.

On a donc $\lim\limits_{k\to+\infty} |\pm k||c_{\pm k}(f)| = 0$, c'est la définition de $\boxed{|c_k(f)| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right) \text{ et } |c_{-k}(f)| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)}$.